

基于确定接触迹线的点接触齿轮副构建及实验

彭 帅^{1,2,3}, 张 靖², 王林翔³

(1. 重庆文理学院 智能制造工程学院, 重庆 402160;

2. 浙江双环传动机械股份有限公司 机械研究院, 杭州 311100;

3. 浙江大学 机械工程学院, 杭州 310027)

摘 要: 提出一种点接触齿轮副, 在已知齿面上根据设计需要确定接触迹线, 推导其共轭曲线, 将齿廓曲线沿共轭曲线扫掠后形成轮齿齿面, 构建与已知齿轮正确啮合的配对齿轮, 并推导该齿轮副的滑动系数计算方法; 以渐开线内齿轮为已知齿轮, 设计以抛物线齿面作为轮齿齿面的配对齿轮, 进行齿轮样机制造和效率实验研究。结果表明, 该齿轮副在啮合过程中时刻保持点接触状态, 啮合点沿着理论接触迹线移动, 与理论分析一致; 滑动系数的大小取决于齿轮两端选取啮入点和啮出点所对应的渐开线参数值范围; 实验后齿轮副实际接触迹线与理论接触迹线一致, 且效率稳定在 97.2%~98.5%。

关 键 词: 抛物线齿面; 接触迹线; 共轭曲线; 齿面构建; 效率实验

中图分类号: V219

文献标志码: A

Construction and experiment of point contact gear pair with certain contact trace

PENG Shuai^{1,2,3}, ZHANG Jing², WANG Linxiang³

(1. School of Intelligent Manufacturing Engineering,

Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China;

2. Machinery Research Institute,

Zhejiang Shuanghuan Driveline Company Limited, Hangzhou 311100, China;

3. School of Mechanical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: A type of point contact gear pair was proposed. Based on a given tooth surface, the flexible contact trace was selected according to the design requirements, and the conjugated curve was derived. A tooth surface was established by sweeping along the conjugated curve, and the meshing pair gear was constructed. The sliding coefficient calculation method of the this gear pair was studied. Taking the involute internal gear as the given tooth surface, the parabolic tooth surface was designed as the matching gear. The gear pair was manufactured and efficiency experiment was carried out. The results showed that during the whole meshing process, the gear pair kept point contact state, and the meshing point moved along the theoretical contact trace, which was consistent with the theoretical analysis. The variation range of the sliding coefficient mainly

收稿日期: 2020-12-11

基金项目: 重庆市自然科学基金(基础研究与前沿探索项目)面上项目(cstc2019jcyj-msxmX0586);

机械传动国家重点实验室开放基金(SKLM-T-MSKFKT-202017); 重庆文理学院人才引进项目(R2018SJD18)

作者简介: 彭帅(1988—), 男, 讲师, 博士, 主要从事精密齿轮传动研究。E-mail: shuaipeng@cqwu.edu.cn

引用格式: 彭帅, 张靖, 王林翔. 基于确定接触迹线的点接触齿轮副构建及实验[J]. 航空动力学报, 2021, 36(11): 2437-2446. PENG Shuai, ZHANG Jing, WANG Linxiang. Construction and experiment of point contact gear pair with certain contact trace[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(11): 2437-2446.

depended on the involute parameter values at the approach point and the recess point. After the experiment, the actual contact trace was consistent with the theoretical contact trace, and the efficiency was kept stable within a range from 97.2% to 98.5%.

Key words: parabolic tooth surface; contact trace; conjugated curve; construction of tooth surface; efficiency experiment

齿轮业是装备制造业的基础性产业,是实现产业升级、技术进步的重要保障,在国民经济和国防领域具有重要地位^[1],如何构建性能优良的齿轮副是我国装备制造业发展中需要解决的重要问题。

齿面的几何特性是提高其性能的关键因素,新型齿面的研究一直是齿轮的热点研究内容。从20世纪70年代开始,国外学者 Foxma 和 Olivier 分别对空间啮合的理论展开了研究,其成果奠定了空间啮合原理的理论基础,此后许多学者开始研究齿轮啮合的解析法,包括建立啮合方程式,求解特征线和包络齿面等,并逐渐发展成运动学法^[2]。Litvin 等^[3]对共轭曲面啮合理论进行了全方位的诠释,叙述了多种形式齿轮的几何学及啮合原理。Radzevich^[4]和 Dooner 等^[5]分别就一般齿轮传动基本理论、运动几何学等内容进行了分析研究。Neagoe 等^[6]在摆线针轮行星传动的研究基础上提出了一种行星轮齿廓为针齿,内齿轮齿廓为内摆线啮合的少齿差行星传动机构的基本啮合原理及数学模型。Demenego 等^[7]根据摆线泵运动学原理使得任意时刻只有一对齿呈啮合状态,以避免齿廓干涉、减小磨损。

国内在微分几何学、空间曲面共轭几何学及其基本原理、共轭曲面建模方面发展迅速^[8],为齿轮啮合理论的发展奠定了基础。而对于新型齿轮的研究同样有所进展,例如点线啮合齿轮^[9]、弧齿线圆柱齿轮^[10]、端曲面齿轮^[11]、弧线齿面齿轮^[12]、非正交弧线齿面齿轮^[13]。此外,贵新成等^[14]提出了具有高重合度的内啮合复合摆线齿轮副,提高齿轮的承载能力和传动的平稳性。作为对空间曲面啮合理论的扩展,陈扬枝等^[15]通过建立空间曲线沿接触点主法线方向的啮合方程及啮合曲线方程,提出了适合于微小弹性啮合轮传动机构的空间曲线啮合理论。陈兵奎等^[17]提出了共轭曲线原理^[16]与线面共轭啮合原理,基于该理论建立的齿轮具有承载能力高、滑动率低的优点。

提出一种点接触齿轮副构建方法,构建以渐开线齿轮作为已知齿轮、抛物线齿轮为配对齿轮

的齿轮副,分析不同参数取值对滑动系数的影响,并进行效率实验研究。该方法的优点在于可以其接触迹线可以灵活选取,为齿面构建提供一种思路,通过该方法建立的齿轮具有传动效率高、滑动系数低,齿面不易磨损的优点。

1 齿轮副几何构建方法

1.1 齿轮副构建步骤

本文提出的点接触齿轮副是基于一个已知齿轮,构建出与之正确啮合的配对齿轮。由于理论接触迹线在已知齿面上选取,因此,通过探寻接触迹线特性,可获得具有优良啮合性能的齿轮传动。具体构建步骤如下(如图1所示):

- 1) 在已知齿轮齿面上选取一条光滑曲线作为理论接触迹线。
- 2) 根据所构建齿轮副的轴线相对位置(平行轴、相交轴、交错轴),构建笛卡儿空间坐标系,求解接触迹线间的相对运动速度及法矢量。
- 3) 构建啮合方程数学模型,通过坐标变换求解与选取接触迹线相啮合的共轭曲线。
- 4) 通过法向量扫描法,将轮齿齿廓沿共轭曲线扫描后形成新的齿轮齿面,从而构建出与之正确啮合的配对齿轮。

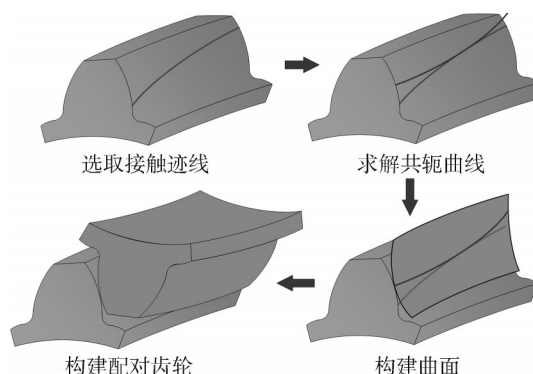


图1 齿轮副构建步骤

Fig.1 Construction steps of gear pair

1.2 接触迹线选取

对于目前应用广泛的齿轮,如渐开线斜齿轮,圆弧齿轮等,其轮齿齿面可以看成由齿廓沿着一

条引导线(圆柱螺旋线)扫掠后形成。所提出的齿轮特点在于该引导线可根据需要选取,而不局限于圆柱螺旋线,为齿轮副构建提供了很大的灵活性。

点接触齿轮,啮合点运动方式为从齿轮一端向另一端移动,啮合线通常沿轴线方向,如圆弧齿轮。本文中,其啮入点和啮合点可在齿轮两端面灵活选取,将齿面上连接两点的光滑曲线作为接触迹线。该接触迹线理论上有无数种取法(如图 2 所示),作为曲面上连接两点的曲线,最短的一条为测地线,但其求解方式往往比较复杂,因此,在实际设计过程中可选取一条数学表达式简单的曲线作为接触迹线以减少计算量。

令已知齿面 Σ_2 在其移动坐标系 S_2 下的曲面方程为

$$\Sigma_2^2 = x_2(u, v)\mathbf{i}_2 + y_2(u, v)\mathbf{j}_2 + z_2(u, v)\mathbf{k}_2 \quad (1)$$

其中 $x_2(u, v)$ 、 $y_2(u, v)$ 、 $z_2(u, v)$ 为 u 、 v 的纯量函数, $\mathbf{i}_2$ 、 $\mathbf{j}_2$ 、 $\mathbf{k}_2$ 分别为坐标系 S_2 下 x 、 y 、 z 轴的单位矢量。

在曲面上选取接触迹线时,可以通过约束曲面方程中的变量来进行确定。假设接触迹线中变量 u 、 v 有如下关系:

$$v = v(u) \quad (2)$$

则该理论接触迹线可表示为

$$\begin{cases} \Gamma_2^2 = x_2(u, v)\mathbf{i}_2 + y_2(u, v)\mathbf{j}_2 + z_2(u, v)\mathbf{k}_2 \\ v = v(u) \end{cases} \quad (3)$$

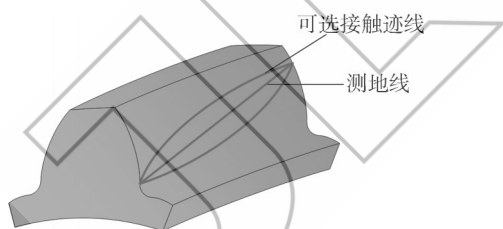


图 2 接触迹线选取

Fig.2 Select of contact trace

1.3 啮合方程求解

本节以平行轴内啮合齿轮副为例进行推导,其他类型的齿轮推导过程与此类似。

首先构建空间坐标系如图 3 所示。 $S_0(O_0-x_0, y_0, z_0)$ 和 $S_p(O_p-x_p, y_p, z_p)$ 为两齿轮所在的固定坐标系, $S_1(O_1-x_1, y_1, z_1)$ 和 $S_2(O_2-x_2, y_2, z_2)$ 分别为两齿

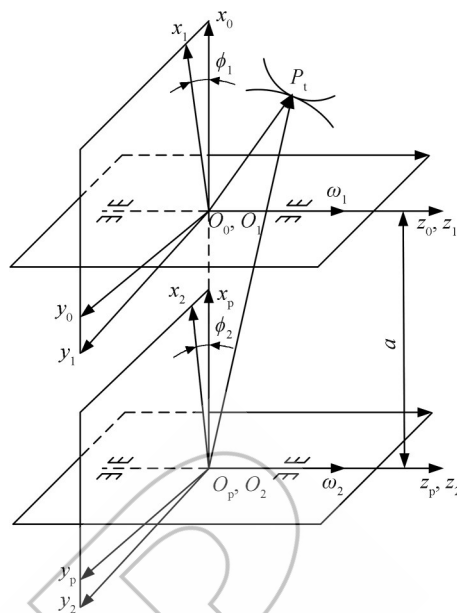


图 3 坐标系构建

Fig.3 Construction of coordinate system

轮所在的移动坐标系。齿轮 1 以角速度 ω_1 绕坐标轴 z_0 旋转, 齿轮 2 以角速度 ω_2 绕坐标轴 z_p 旋转。 z_0 和 z_p 相互平行, 且距离(中心距)为 a 。在某一时刻, 齿轮 1 和齿轮 2 转过的角度分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 , P_1 为两条接触迹线的接触点。

坐标系 S_2 下两齿轮在啮合点处的相对运动速度可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^{(12)} = & [-(\omega_1 - \omega_2)y_2 - a\omega_1 \sin \phi_2]\mathbf{i}_2 + \\ & [(\omega_1 - \omega_2)x_2 - a\omega_1 \cos \phi_2]\mathbf{j}_2 \end{aligned} \quad (4)$$

由几何关系可得, 在坐标系 S_2 中, 已知曲面 Σ_2 在啮合点 P_1 处的法向量 $\mathbf{n}_2$ 可表示为

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\partial \Sigma_2^2}{\partial u} \times \frac{\partial \Sigma_2^2}{\partial v} \quad (5)$$

因此, 啮合方程为

$$\mathbf{v}_2^{(12)} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (6)$$

1.4 共轭曲线及啮合线求解

由坐标变换关系可得, 共轭曲线上的任意点是已知接触迹线上满足啮合方程的点通过坐标变换得到的。因此, 与接触迹线 Γ_2 相接触的共轭曲线 Γ_1 在坐标系 S_1 下的方程如下:

$$\begin{cases} \Gamma_1^2 = M_{12}\Gamma_2^2 = M_{10}M_{0p}M_{p2}\Gamma_2^2 \\ \mathbf{v}_2^{(12)} \cdot \mathbf{n}_2^{12} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$M_{12} = M_{10}M_{0p}M_{p2} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 - \phi_2) & \sin(\phi_1 - \phi_2) & 0 & -a \cos(\phi_1) \\ -\sin(\phi_1 - \phi_2) & \cos(\phi_1 - \phi_2) & 0 & a \sin(\phi_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

啮合线定义为接触点在空间固定坐标系上的集合。将接触迹线 Γ_2 理论接触点由动坐标系 S_1 坐标变换到空间固定坐标系 S_p 下,推导出啮合线方程如下:

$$\begin{cases} x_h = x_2 \cos \phi_2 - y_2 \sin \phi_2 \\ y_h = x_2 \sin \phi_2 + y_2 \cos \phi_2 \\ z_h = z_2 \end{cases} \quad (9)$$

其中 x_h, y_h, z_h 为啮合线在空间固定坐标系 S_p 下的坐标值。

1.5 共轭齿面构建——法向量扫掠法

齿轮齿廓决定了齿轮的接触性能。本节提出了将共轭曲线作为引导线,齿廓作为母线沿共轭曲线扫掠形成齿面,同时保证新齿面与已知齿面接触方向一致的齿面构建方法。如图4所示,假设 β_1, α_1 和 γ_1 构成了移动坐标系 S_c 的3个坐标轴,其中 β_1, α_1 和 γ_1 分别为文中第1.4节中共轭曲线在坐标系 S_1 下的主法矢、切矢和副法矢,可以看出, β_1 同时为新齿面的法向量。接触点 P_1 为移动坐标系 S_c 原点。

首先求解移动坐标系坐标轴矢量,根据几何学关系,将 β_1, α_1 和 γ_1 的单位矢量 $n_{d\beta}, n_{d\alpha}, n_{d\gamma}$ 表示为

$$\begin{cases} n_{d\beta} = n_{dx\beta} i_c + n_{dy\beta} j_c + n_{dz\beta} k_c \\ n_{d\alpha} = n_{dx\alpha} i_c + n_{dy\alpha} j_c + n_{dz\alpha} k_c \\ n_{d\gamma} = n_{dx\gamma} i_c + n_{dy\gamma} j_c + n_{dz\gamma} k_c \end{cases} \quad (10)$$

式中 $n_{dx\beta}, n_{dx\alpha}, n_{dx\gamma}$ 分别为其对应坐标值。

其次,坐标系 S_c 下的齿廓方程可表示为

$$\mathbf{r}(t) = [x_c \ y_c \ z_c \ 1]^T \quad (11)$$

因此,齿廓经扫掠后,新齿面在坐标系 S_1 下的曲面方程为

$$\begin{cases} x_{s1} = n_{dx\beta} x_c + n_{dx\alpha} y_c + n_{dx\gamma} z_c + x_{r1} \\ y_{s1} = n_{dy\beta} x_c + n_{dy\alpha} y_c + n_{dy\gamma} z_c + y_{r1} \\ z_{s1} = n_{dz\beta} x_c + n_{dz\alpha} y_c + n_{dz\gamma} z_c + z_{r1} \end{cases} \quad (12)$$

式中 x_{s1}, y_{s1}, z_{s1} 为齿面在坐标系 S_1 下的坐标值。

对齿轮参数齿顶圆、齿根圆和齿宽进行计算,则完整的轮齿齿面可通过齿顶圆曲面、齿根圆曲

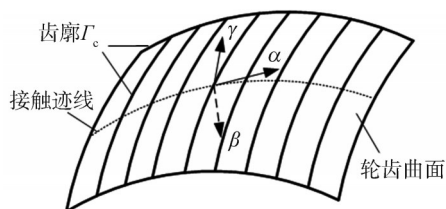


图4 齿面构建

Fig.4 Construction of tooth surface

面和齿轮端面截取获得,如图5所示。这样,便构建出一个完整的轮齿齿面,其他轮齿可通过该轮齿阵列后得到。

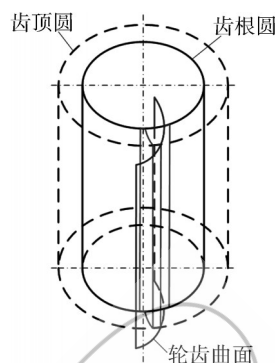


图5 轮齿构建

Fig.5 Construction of gear

2 滑动系数计算方法

齿轮在啮合过程中,相互啮合的一对齿面在接触线(点)处的相对运动速度往往不同,而传动过程中载荷的作用,将使得两齿面产生相对滑动和摩擦。相对滑动量的大小可用滑动系数来表示。滑动系数的绝对值越大,齿面间的相对滑动就越严重,齿面磨损也越严重,越容易发生失效。因此滑动系数是衡量齿面啮合线(点)处磨损程度的重要标准。

根据滑动系数的定义,在接触点处的滑动系数

$$\eta_1 = \lim_{\Delta \Gamma_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma_1 - \Delta \Gamma_2}{\Delta \Gamma_1} = 1 - \frac{d\Gamma_2}{d\Gamma_1} \quad (13)$$

$$\eta_2 = \lim_{\Delta \Gamma_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma_2 - \Delta \Gamma_1}{\Delta \Gamma_2} = 1 - \frac{d\Gamma_1}{d\Gamma_2} \quad (14)$$

其中

$$d\Gamma_1 = \sqrt{dx_{r1}^2 + dy_{r1}^2 + dz_{r1}^2} d\theta \quad (15)$$

$$d\Gamma_2 = \sqrt{dx_{r2}^2 + dy_{r2}^2 + dz_{r2}^2} d\theta \quad (16)$$

因此,滑动系数可表示为

$$\eta_1 = 1 - \frac{\sqrt{dx_{r2}^2 + dy_{r2}^2 + dz_{r2}^2}}{\sqrt{dx_{r1}^2 + dy_{r1}^2 + dz_{r1}^2}} \quad (17)$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{\sqrt{dx_{r1}^2 + dy_{r1}^2 + dz_{r1}^2}}{\sqrt{dx_{r2}^2 + dy_{r2}^2 + dz_{r2}^2}} \quad (18)$$

3 抛物线齿面齿轮副构建实例

本章以平行轴内齿轮副为例,通过设定具体参数,构建以渐开线齿轮为已知齿轮、抛物线齿面

齿轮为配对齿轮,对提出的齿轮副构建方法进行理论验证,并计算该齿轮副滑动系数,讨论不同接触迹线对滑动系数的影响。

3.1 齿轮副构建

根据文中第 1.2 节所述,可知内齿轮齿面 Σ_2 在其移动坐标系 S_2 下的曲面方程为

$$\begin{cases} x_{\Sigma 2} = r \cos(\theta + \alpha) + r\theta \sin(\theta + \alpha) \\ y_{\Sigma 2} = r \sin(\theta + \alpha) - r\theta \cos(\theta + \alpha) \\ z_{\Sigma 2} = p\alpha \end{cases} \quad (19)$$

式中 r 为齿轮基圆半径, θ 为渐开线参数即渐开线展角, α 为旋转角, p 为齿轮螺旋参数, $x_{\Sigma 2}$ 、 $y_{\Sigma 2}$ 、 $z_{\Sigma 2}$ 为齿面在坐标系 S_2 下的坐标值。

齿面 Σ_2 上选取接触迹线的形状可由参数 θ 和 α 决定。在此,假设两参数具有如下线性关系:

$$\alpha = k\theta + b \quad (20)$$

其中 $k = \frac{B}{p(\theta_2 - \theta_1)}$ 、 $b = -\frac{\theta_1 B}{p(\theta_2 - \theta_1)}$, B 为齿轮齿宽, θ_1 和 θ_2 分别为齿轮两端面上啮入点与啮出点处的渐开线参数值。

$$\begin{cases} x_{r1} = x_{r2} \cos[(i_{12} - 1)\phi_2] + y_{r2} \sin[(i_{12} - 1)\phi_2] - a \sin(i_{12}\phi_2) \\ y_{r1} = -x_{r2} \sin[(i_{12} - 1)\phi_2] + y_{r2} \cos[(i_{12} - 1)\phi_2] + a \sin(i_{12}\phi_2) \\ z_{r1} = z_{r2} \\ A \sin(\phi_2) + B \cos(\phi_2) = M \end{cases} \quad (24)$$

根据文中第 1.5 节所述,坐标系 S_c 下的抛物线齿廓方程为

$$\mathbf{I}(t) = [x_c \ y_c \ z_c \ 1]^T = [k_1 t^2 \ 0 \ k_1 t \ 1]^T \quad (25)$$

移动坐标系 S_c 的坐标轴矢量 β_1 、 α_1 和 γ_1 为

$$\begin{cases} n_{x\beta 2} = n'_{x2} \cos[(i_{12} - 1)\phi_2] + n'_{y2} \sin[(i_{12} - 1)\phi_2] \\ n_{y\beta 2} = -n'_{x2} \sin[(i_{12} - 1)\phi_2] + n'_{y2} \cos[(i_{12} - 1)\phi_2] \\ n_{z\beta 2} = n'_{z2} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} n_{xa2} = x'_{r2} \cos[(i_{12} - 1)\phi_2] + y'_{r2} \sin[(i_{12} - 1)\phi_2] \\ n_{ya2} = -x'_{r2} \sin[(i_{12} - 1)\phi_2] + y'_{r2} \cos[(i_{12} - 1)\phi_2] \\ n_{za2} = z'_{r2} \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} n_{xy2} = n_{y\beta 2} n_{za2} - n_{ya2} n_{z\beta 2} \\ n_{yz2} = n_{z\beta 2} n_{xa2} - n_{za2} n_{x\beta 2} \\ n_{zy2} = n_{x\beta 2} n_{ya2} - n_{xa2} n_{y\beta 2} \end{cases} \quad (28)$$

单位化后得

$$\begin{cases} n_{nx\beta 2} = \frac{n_{x\beta 2}}{\sqrt{n_{x\beta 2}^2 + n_{y\beta 2}^2 + n_{z\beta 2}^2}} \\ n_{ny\beta 2} = \frac{n_{y\beta 2}}{\sqrt{n_{x\beta 2}^2 + n_{y\beta 2}^2 + n_{z\beta 2}^2}} \\ n_{nz\beta 2} = \frac{n_{z\beta 2}}{\sqrt{n_{x\beta 2}^2 + n_{y\beta 2}^2 + n_{z\beta 2}^2}} \end{cases} \quad (29)$$

因此,接触迹线的数学表达式为

$$\begin{cases} x_{r2} = r \cos(\theta + \alpha) + r\theta \sin(\theta + \alpha) \\ y_{r2} = r \sin(\theta + \alpha) - r\theta \cos(\theta + \alpha) \\ z_{r2} = p\alpha \\ \alpha = k\theta + b \end{cases} \quad (21)$$

根据式(5),坐标系 S_2 中齿面 Σ_2 在啮合点 P_i 处的法向量可表示为

$$\begin{cases} n_{x2} = -pr\theta \sin[(k+1)\theta + b] \\ n_{y2} = pr\theta \cos[(k+1)\theta + b] \\ n_{z2} = -r^2\theta \end{cases} \quad (22)$$

式中 n_{x2} 、 n_{y2} 、 n_{z2} 为法向量的坐标表示。

因此,啮合方程为

$$A \sin(\phi_2) + B \cos(\phi_2) = M \quad (23)$$

其中 $\phi_1 = i_{12}\phi_2$ 、 $A = i_{12}an_{r2}$ 、 $B = i_{12}an_{y2}$ 、 $M = (i_{12} - 1) \cdot (x_2 n_{y2} - y_2 n_{x2})$, i_{12} 为齿轮副传动比。

将式(6)、式(21)、式(22)和式(23)代入式(7),可求解出与选取接触迹线相啮合的共轭曲线方程为

$$\begin{cases} n_{nra2} = \frac{n_{xa2}}{\sqrt{n_{xa2}^2 + n_{ya2}^2 + n_{za2}^2}} \\ n_{nya2} = \frac{n_{ya2}}{\sqrt{n_{xa2}^2 + n_{ya2}^2 + n_{za2}^2}} \\ n_{nza2} = \frac{n_{za2}}{\sqrt{n_{xa2}^2 + n_{ya2}^2 + n_{za2}^2}} \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} n_{n\gamma 2} = \frac{n_{\gamma 2}}{\sqrt{n_{x\gamma 2}^2 + n_{y\gamma 2}^2 + n_{z\gamma 2}^2}} \\ n_{n\gamma 2} = \frac{n_{y\gamma 2}}{\sqrt{n_{x\gamma 2}^2 + n_{y\gamma 2}^2 + n_{z\gamma 2}^2}} \\ n_{n\gamma 2} = \frac{n_{z\gamma 2}}{\sqrt{n_{x\gamma 2}^2 + n_{y\gamma 2}^2 + n_{z\gamma 2}^2}} \end{cases} \quad (31)$$

式中 n_{xi2} 、 n_{yi2} 、 n_{zi2} ($i=\beta, \alpha, \gamma$) 为移动坐标系 S_c 的坐标轴矢量的坐标表示, n_{nri2} 、 n_{nyi2} 、 n_{nzi2} ($i=\beta, \alpha, \gamma$) 分别为其单位化矢量的坐标表示。

则齿轮 1 的齿面方程为

$$\begin{cases} x_{\Sigma 1} = n_{n\beta 2}x_c + n_{n\alpha 2}y_c + n_{n\gamma 2}z_c + x_{\Gamma 1} \\ y_{\Sigma 1} = n_{ny\beta 2}x_c + n_{nya2}y_c + n_{ny\gamma 2}z_c + y_{\Gamma 1} \\ z_{\Sigma 1} = n_{nz\beta 2}x_c + n_{nza2}y_c + n_{nz\gamma 2}z_c + z_{\Gamma 1} \end{cases} \quad (32)$$

3.2 啮合仿真

本文提出的齿轮副三维模型通过 Matlab 和 Unigraphics NX 进行精确建模。先在 Matlab 软件中编写齿面方程, 得到齿面上的数据点坐标, 导入到 UG 中进行曲面拟合后形成齿面三维模型。相关齿轮参数如表 1 所示。

图 6 为根据表 1 中齿轮参数构建的 Matlab 齿面模型啮合图示。与传统点接触齿轮啮合线不同的是, 该齿轮副啮合线并不平行于齿轮旋转轴线, 原因是啮入点与啮出点渐开线参数取值不相等。

表 1 齿轮副参数

Table 1 Parameters of gear pair

参数	数值及详情
法向模数 m_n/mm	2
螺旋角 $\epsilon/(\circ)$	22
抛物线齿轮齿数 z_1	18
渐开线齿轮齿数 z_2	267
齿宽 B	25
啮入点渐开线参数 θ_1/rad	0.33
啮出点渐开线参数 θ_2/rad	0.45
旋向	右旋

图 6(a) 为两齿面在啮入点处啮合, 该点所对应的渐开线参数为 θ_1 。图 6(b) 为齿轮副转动一定角度后的接触状态。图 6(c) 为两齿面啮出时的接触状态, 该点所对应的渐开线参数为 θ_2 。整个传动过程中, 啮合点始终沿着对应的接触迹线移动, 且始终在理论啮合线上。

图 7 为 UG 中齿轮副三维模型的运动仿真模型。可以看出: 在啮合整个过程中, 齿轮副时刻保持点接触状态, 且啮合点沿着理论接触迹线移动。

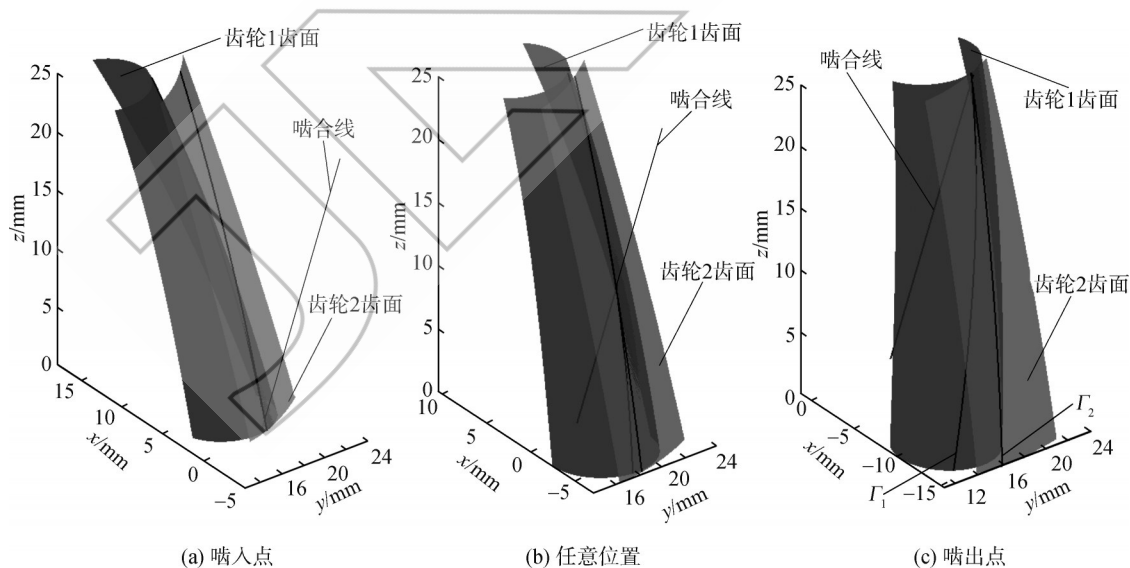


图 6 Matlab 齿面啮合模型

Fig.6 Meshing model of tooth surface in Matlab

3.3 滑动系数计算

共轭的一对啮合迹线已在文中第 3.1 节中

得到, 根据第 2 章所述, 将式 (21)、式 (24) 代入式 (15)、式 (16), 可得

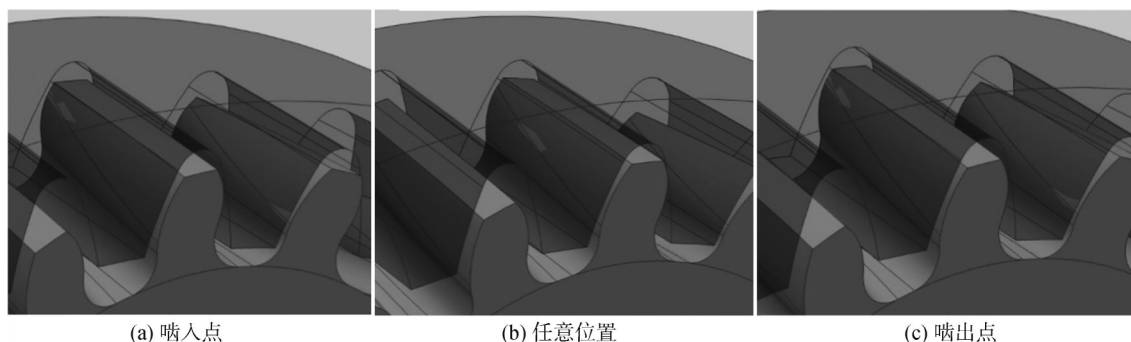


图7 UG 三维运动仿真模型

Fig.7 Three-dimensional motion simulation model in UG

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\theta} = r[(1+k)\theta \cos(\alpha + \theta) - k \sin(\alpha + \theta)] \\ \frac{dy_1}{d\theta} = r[k \cos(\alpha + \theta) + (1+k)\sin(\alpha + \theta)] \\ \frac{dz_1}{d\theta} = kp \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{d\theta} = c_{2t}x_1 + c_2x'_1 - c_{1t}y_1 - c_1y'_1 - \frac{a\phi'(\theta)\sin\left(\frac{\phi_1}{i_{12}}\right)}{i_{12}} \\ \frac{dy_2}{d\theta} = c_{1t}x_1 + c_1x'_1 + c_{2t}y_1 - c_2y'_1 + \frac{a\phi'(\theta)\cos\left(\frac{\phi_1}{i_{12}}\right)}{i_{12}} \\ \frac{dz_2}{d\theta} = kp \end{cases} \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= \sin\left[\left(1 - \frac{1}{i_{12}}\right)\phi_1\right] \\ c_{1t} &= \left(1 - \frac{1}{i_{12}}\right)\cos\left[\left(1 - \frac{1}{i_{12}}\right)\phi_1\right]\phi'(\theta) \\ c_2 &= \cos\left[\left(1 - \frac{1}{i_{12}}\right)\phi_1\right] \\ c_{2t} &= -\left(1 - \frac{1}{i_{12}}\right)\sin\left[\left(1 - \frac{1}{i_{12}}\right)\phi_1\right]\phi'(\theta) \\ \phi'(\theta) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M^2}{A^2 + B^2}}} \left(\frac{M}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)' + \frac{1}{1 + \left(\frac{A}{B}\right)^2} \left(\frac{A}{B} \right)' \end{aligned}$$

再将式(32)、式(33)代入滑动系数计算式(16)、式(17),便得到该齿轮副滑动系数在不同啮合点处的变化情况。图8为根据表1中齿轮参数得到的齿轮滑动系数变化曲线。在啮合过程中,随着啮合点的移动,两齿轮的滑动系数均在 $-6.8 \times 10^{-3} \sim 4.7 \times 10^{-3}$ 范围内,接近于纯滚

动。以应用最广泛的渐开线齿轮为参考对象,其滑动系数一般在 $-1 \sim 2$ 范围内变化,甚至更大^[18],因此可以得出,该齿轮副滑动系数远远小于渐开线齿轮,具有滑动系数小,不易磨损的优点。

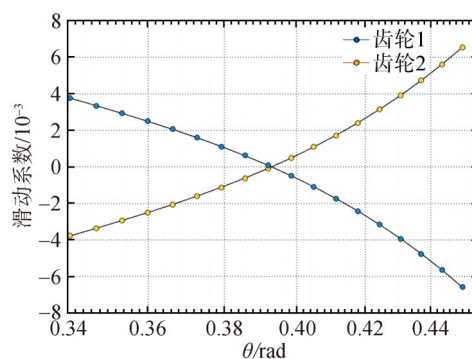


图8 齿轮副滑动系数变化曲线

Fig.8 Variation curve of sliding coefficient of gear pair

3.4 参数对滑动系数影响分析

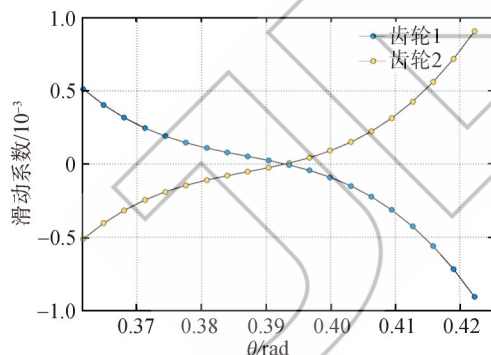
根据以上分析可知,齿轮副齿面模型很大程度上取决于接触迹线的选取。为分析不同接触迹线对滑动系数的影响,本节设置了不同的参数值,

利用 Matlab 绘制了不同参数下两齿轮滑动系数变化情况曲线图。根据参数变化情况,分析滑动系数绝对值的大小。表2是在3组参数下滑动率的最大值与最小值。图9为不同参数下对应滑动系数变化曲线图。

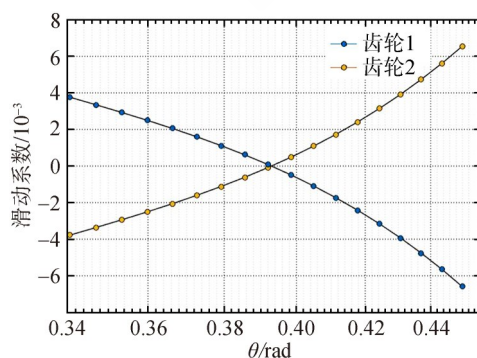
表2 不同渐开线参数下的滑动系数
Table 2 Sliding coefficient under different involute parameters

组别 序号	参数	$\eta_1/10^{-3}$		$\eta_2/10^{-3}$	
		最小值	最大值	最小值	最大值
1	$\theta_1=0.36,$ $\theta_2=0.42$	-0.9	0.5	-0.5	0.9
2	$\theta_1=0.33,$ $\theta_2=0.45$	-6.8	4.7	-4.7	6.8
3	$\theta_1=0.29,$ $\theta_2=0.48$	-13	8	-8	13

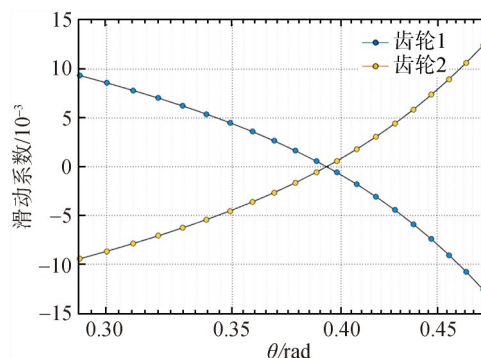
可以看出,滑动系数的变动范围主要取决于在齿轮两端选取啮入点和啮出点对应的 θ 值。当两点的 θ 值越接近时,滑动系数的变化范围越小,反之越大;另外,在分度圆处的滑动系数均为0,此特点与渐开线齿轮相同,但滑动系数比渐开线齿轮小很多。



(a) 第1组



(b) 第2组



(c) 第3组

图9 不同渐开线参数下的滑动系数变化曲线

Fig.9 Variation curves of sliding coefficient under different involute parameters

4 实验

4.1 齿轮加工

数控加工技术的发展,可对复杂齿面进行高效率精密加工^[19]。基于加工方法和曲面复杂程度,本文构建的配对齿轮采用五轴加工中心 DMU60 进行加工,内齿轮在滚齿机上滚齿加工成形,齿轮参数和成形后的齿轮副分别如表1、图10所示。



图10 齿轮副照片

Fig.10 Photo of gear pair

4.2 效率实验

为研究齿轮副在不同转速下的效率,设计了齿轮副测试实验台,如图11所示。实验台由伺服电动机作为驱动,实验齿轮副通过轴承座与伺服电动机相连,中间接有输入端扭矩传感器对扭矩和转速进行实时测量,实验台末端由磁粉制动器提供负载。由于齿轮副减速比较大,因此在输出端设置升速器使磁粉制动器达到工作转速。实验齿轮副和升速器间设有输出端扭矩传感器对扭矩和转速进行实时测量。假设齿轮副输入功率为 P_i ,输出功率为 P_o ,则其效率可表示为

$$\eta = \frac{P_i}{P_o} = \frac{n_i M_i}{n_o M_o} \quad (35)$$

其中 n_i 、 n_o 、 M_i 、 M_o 分别表示输入端与输出端的转

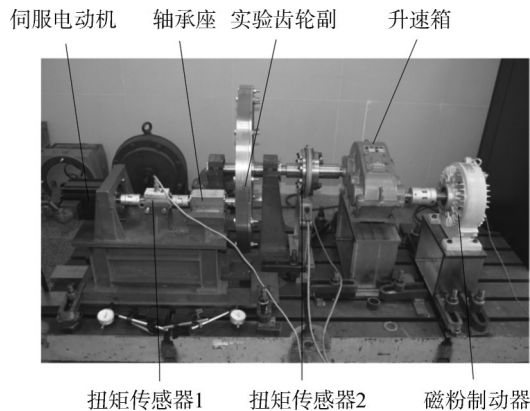


图 11 实验台照片
Fig.11 Photo of experiment rig

速和扭矩。对于实验过程中存在的功率损失,主要存在于小齿轮为悬臂结构,因此在实验过程转速的影响下,不能完全和大齿轮保证轴线上的绝对平行,影响齿轮副效率。

对于点接触齿轮副,在实际啮合当中,由于轮齿的弹性变形,理论接触点会扩散为一个接触面,接触面积的增大可以一定程度降低齿轮接触应力,因此在正式实验前先进行齿轮跑合过程。整个跑合过程共 8 h,前 4 h 在转速为 60 r/min 下空载进行,后 4 h 在转速为 60 r/min、输出扭矩为 60 N·m 下进行。效率实验设置了不同转速(30、60、90、120 r/min)和不同输出扭矩(30~100 N·m),实验时间为 80 h。

实验后,观察配对齿轮接触迹线,如图 12 所示,可以看出与理论接触迹线一致。该齿轮副效率曲线如图 13 所示,图中 n 表示转速。可以得出:输出扭矩一定时,效率随着转速的增大而增大;同样,转速一定时,效率随着扭矩的增大而增大。另外,该齿轮副的传动效率稳定在 97.2%~98.5%。

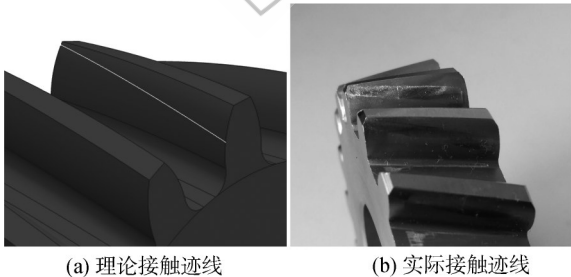


图 12 配对齿轮接触迹线
Fig.12 Contact trace of matching gear

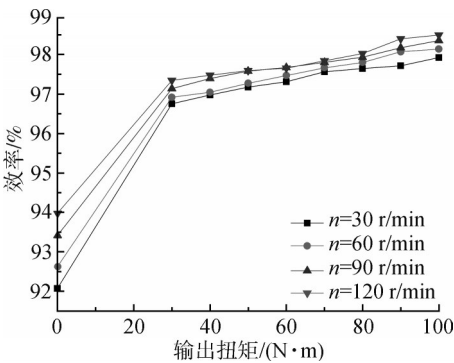


图 13 效率曲线
Fig.13 Efficiency curve

5 结 论

1) 提出一种点接触齿轮构建方法。通过在已知齿轮齿面上选取一条光滑曲线作为理论接触迹线,求解与选取接触迹线相啮合的共轭曲线,将抛物线齿廓沿共轭曲线扫掠后形成新的齿轮齿面,构建出一种点接触齿轮副理论模型。

2) 利用提出的齿轮构建方法,在已知渐开线齿面基础上,形成与之配对的抛物线齿面,得到满足啮合要求点接触齿轮副。通过啮合仿真分析可知,新齿轮副在整个啮合过程中,齿轮副时刻保持点接触状态,且啮合点沿着理论接触迹线移动,与理论分析一致。

3) 通过滑动系数分析可知,该齿轮副的滑动系数均在 $-6.8\times 10^{-3}\sim 4.7\times 10^{-3}$ 范围内,接近于纯滚动,具有滑动系数小,不易磨损的优点。滑动系数的变动范围主要取决于在齿轮两端选取啮入点和啮出点所对应的 θ 值。

4) 通过五轴加工中心对齿轮副进行加工,并进行效率实验。结果表明:齿轮副实际接触迹线与理论接触迹线一致,且效率稳定在 97.2%~98.5%。

5) 实验所用齿轮精度主要取决于三维建模精度及铣齿加工精度,目前尚鲜有批量化加工方法,后续将开展齿轮加工刀具研究。

参考文献:

[1] 陈茜,李俊阳,王家序,等.制造误差对谐波齿轮应力的影响规律[J].浙江大学学报(工学版),2019,53(12):2289-2297.
CHEN Qian, LI Junyang, WANG Jiayu, et al. Influence law of manufacturing error on harmonic gear stress[J]. Journal of ZheJiang University (Engineering Science), 2019, 53(12): 2289-2297. (in Chinese)

- [2] 王树人. 齿轮啮合理论简明教程[M]. 天津: 天津大学出版社, 2005.
- [3] LITVIN F L, FUENTES A. Gear geometry and applied theory[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [4] RADZEVICH S P. Theory of gearing: kinematics, geometry, and synthesis[M]. Boca Raton, Florida, US: CRC (Chemical Rubber Company) Press, 2013.
- [5] DOONER D B, GRIFFIS M W. On spatial Euler-Savary equations for envelopes[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(8): 865-875.
- [6] NEAGOE M, DIACONESCU D, JALIU C, et al. On a new cycloidal planetary gear used to fit mechatronic systems of RES[R]. Brasov, Romania: the 11th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment IEEE, 2008.
- [7] DEMENEGO A, VECCHIATO D, LITVIN F L, et al. Design and simulation of meshing of a cycloidal pump[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(3): 311-332.
- [8] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2009.
- [9] 厉海祥. 点线啮合齿轮传动[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [10] 狄玉涛, 陈明. 弧齿线圆柱齿轮齿面形成原理及啮合性能分析[J]. 机械工程师, 2006, 31(9): 50-52.
- DI Yutao, CHEN Ming. The generation principle and mesh characteristic of arcuate tooth trace cylindrical gear[J]. Mechanical Engineer, 2006, 31(9): 50-52. (in Chinese)
- [11] 林超, 蔡志钦, 吴小勇, 等. 端面齿面副的传动匹配模式[J]. 机械工程学报, 2018, 54(5): 8-18.
- LIN Chao, CAI Zhiqin, WU Xiaoyong, et al. Transmission mode for curve-face gear pair[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(5): 8-18. (in Chinese)
- [12] 盛伟, 王利霞, 冯占荣, 等. 弧线齿面齿轮齿面几何设计及径向齿宽特性[J]. 航空动力学报, 2019, 34(4): 796-803.
- SHENG Wei, WANG Lixia, FENG Zhanrong, et al. Geometrical design of tooth surface and characteristics of radial tooth width for face gear with arc tooth[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(4): 796-803. (in Chinese)
- [13] 陈勇, 冯占荣, 盛伟, 等. 非正交弧线齿面齿轮齿面设计及根切研究[J]. 航空动力学报, 2020, 35(5): 1081-1088.
- CHEN Yong, FENG Zhanrong, SHENG Wei, et al. Research on tooth surface design and undercutting of non-orthogonal arc tooth face-gears[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(5): 1081-1088. (in Chinese)
- [14] 贵新成, 李红勋, 金晓辉, 等. 高重合度摆线内齿轮副齿面接触强度研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(23): 109-119.
- GUI Xincheng, LI Hongxun, JIN Xiaohui, et al. Tooth surface contact strength of cycloid internal gear pair with high contact ratio[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(23): 109-119. (in Chinese)
- [15] CHEN Yangzhi, XIAO Xiaoyong, LUO Liang. A corrected equation of space curve meshing[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(7): 1348-1359.
- [16] 陈兵奎, 梁栋, 高艳娥. 齿轮传动共轭曲线原理[J]. 机械工程学报, 2014, 50(1): 130-136.
- CHEN Bingkui, LIANG Dong, GAO Yan'e. The principle of conjugate curves for gear transmission[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(1): 130-136. (in Chinese)
- [17] 陈兵奎, 易文翠, 钟晖, 等. 线面共轭啮合原理及齿面构建方法[J]. 机械工程学报, 2012, 48(19): 17-22.
- CHEN Bingkui, YI Wencui, ZHONG Hui, et al. Theory of curve-surface conjugated and method of teeth surfaces constructed[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(19): 17-22. (in Chinese)
- [18] 李优华, 陈超, 张志宏, 等. 渐开线齿轮传动滑动率分析[J]. 轻工科技, 2020, 36(4): 49-52.
- LI Youhua, CHEN Chao, ZHANG Zhihong, et al. Analysis on contact ratio of involute gear[J]. Light industry science and technology, 2020, 36(4): 49-52. (in Chinese)
- [19] TANG Jinyuan, CUI Wei, ZHOU Heng, et al. Integrity of grinding face-gear with worm wheel[J]. Journal of Central South University, 2016, 23(1): 77-85.

(编辑: 王碧珺)